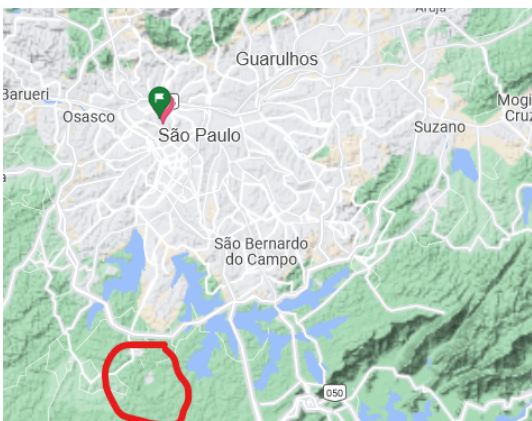
Aula 6 - Vetores

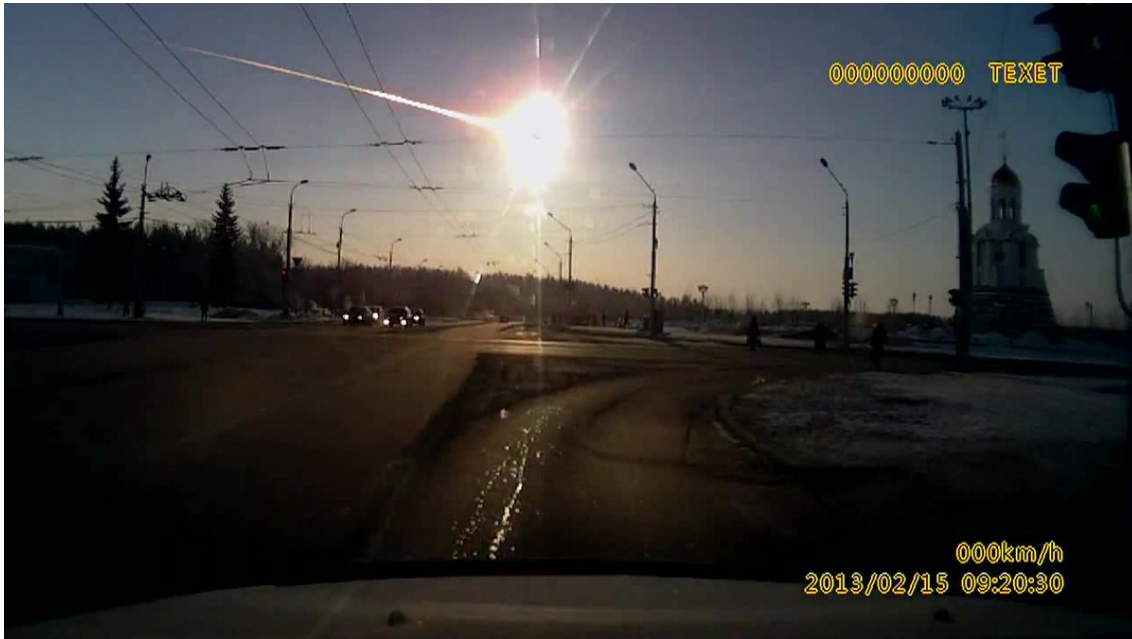
Introdução:

Até agora, analisamos movimentos que se davam, ou na vertical, ou na horizontal. No entanto, sabemos que isso limita muito a nossa compreensão da realidade. No mundo em que vivemos, os movimentos acontecem toda hora em todas as direções, inclusive mudando elas no decorrer da trajetória, como uma pedra arremessada para frente, os planetas girando em torno do Sol, ou as moléculas de água se chocando umas com as outras no copo em cima da sua mesa. Em todos os níveis, microscópico, macroscópico ou astronômico, os movimentos são muito mais complexos do que ir para trás ou para frente, para cima ou para baixo. Como estudá-los? Como descrevê-los usando o "matematiquês"? É sobre isso que vamos tratar nesta aula.

"Cometo CRIMES com direção e magnitude!":

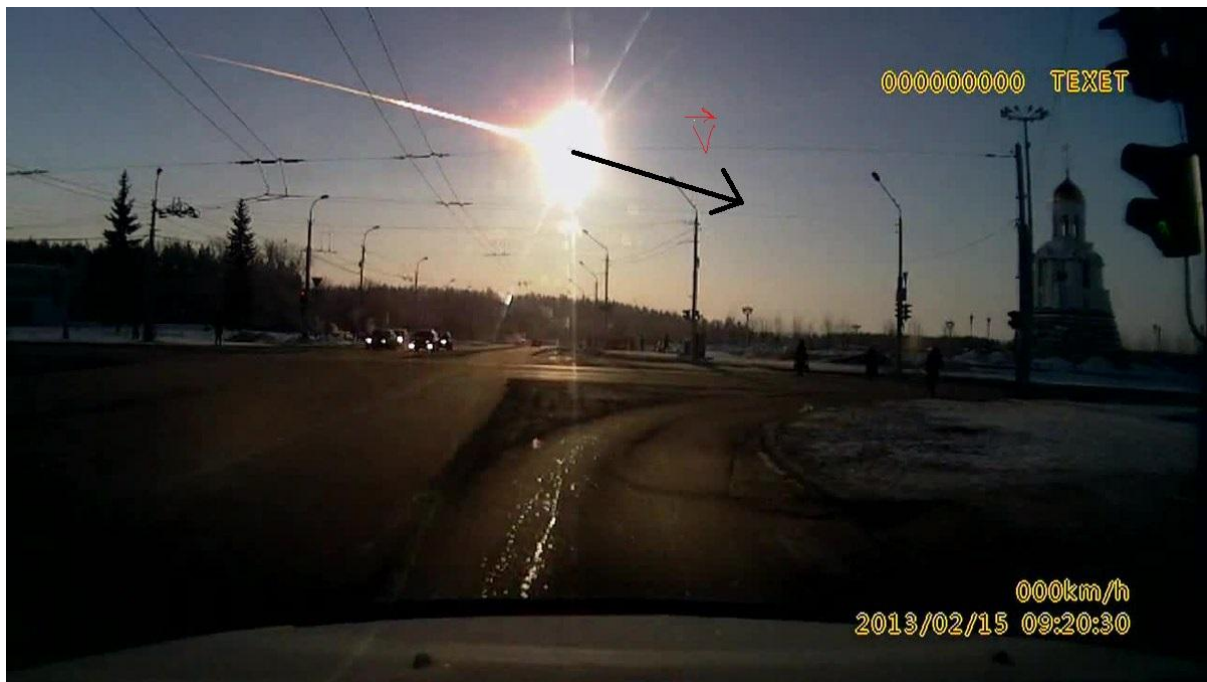
Imagine que você está na região que compreende atualmente a zona sul da Cidade de São Paulo, mas não atualmente e sim em algum momento entre 5 e 36 milhões de anos atrás. Naquela época os animais eram bem diferentes do que são hoje, a região onde hoje está a cidade era parte de uma enorme serra que margeava a costa do sudeste do Brasil, chamada de Serra do Mar Cretácea, cuja parte central havia acabado de colapsar e afundar, restando de pé a Serra do Mar e a Serra da Mantiqueira. A região da atual zona norte era palco desse colapso, a Serra da Cantareira é parte do que sobrou de pé e foi impulsionado para cima. O Rio Tietê provavelmente ainda não passava por aqui e se passava era um rio muito diferente do rio onde o meu avô nadou um dia. Pra você ter uma ideia de quanto tempo faz, faltavam alguns milhões de anos para os nossos parentes mais antigos andarem em duas patas.

Você olha para o céu de noite e vê que uma nova estrela surgiu, esse ponto segue aumentando até que de repente um rastro de luz se faz visível no céu, ele segue em direção ao chão acompanhado de um enorme clarão. Você escuta um som ensurdecedor. Caso você ainda esteja vivo, pode caminhar até onde a enorme luz atingiu o chão. Lá você vê uma enorme cratera de 3,6 km de diâmetro: essa é a Cratera da Colônia. Rola, inclusive, de visitar

ela hoje em dia lá em Parelheiros, é meio longinho ir da ZN até lá, mas com certeza vale uma visita de final de semana.

Mas por que toda essa digressão geológica? Porque os meteoros (quando estão em voo), ou meteoritos (quando estão em terra), descrevem uma trajetória no céu que não é nem vertical, nem horizontal. Olha o que caiu lá na Rússia em Chelyabinsk: https://www.youtube.com/watch?v=svzB0QYNIWI .

Mas e aí? Como que a física faz pra descrever esse tipo de movimento? A resposta é, rufem os tambores: vetores! Não, não é aquele cara do "Meu Malvado Favorito", mas ele dá uma explicação meia boca do que é um vetor, olha só: Vector - Meu Malvado Favorito . Vamos entender direito o que é esse negócio de vetor e como a gente pode usar ele ao nosso favor.

Os vetores:

Até agora estávamos trabalhando com grandezas **escalares**, as grandezas que possuem apenas magnitude. Um exemplo de grandeza puramente escalar é a temperatura, ela tem só a magnitude, se eu te pergunto: quantos °C está fazendo hoje aí na sua casa? Você me responde só um valor numérico e pronto, está descrita a temperatura. Mas nem tudo são flores, existem muitas grandezas que você precisa de mais dados do que apenas um número para descrevê-las. Se eu te perguntar: qual é a velocidade do meteoro que caiu aqui em São Paulo no passado? Você não pode só me responder a velocidade escalar, como estávamos fazendo até agora, dando só um valor numérico pra velocidade e assumindo uma direção como positiva, você vai ter que dizer um **valor numérico**, uma **direção** e um **sentido**. As grandezas que precisam de **magnitude**, **direção** e **sentido** para serem descritas são chamadas de vetoriais.

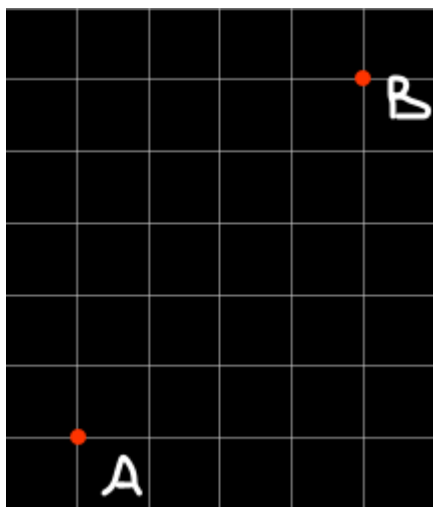
Vamos nos aprofundar um pouco mais, como podemos expressar esses 3 detalhes citados acima? Com uma seta! Essa seta é chamada de **vetor**. Para ilustrar vou desenhar o vetor que representa a velocidade no movimento do meteoro de Chelyabinsk:

A seta preta representa a direção e o sentido da velocidade, o comprimento dessa seta representa a magnitude desse vetor, lembrando que para casos ilustrativos você não precisa ficar medindo o tamanho da seta que você faz no seu esquema. O “v” com a seta em cima serve para dizer que a seta preta é o vetor que representa a velocidade. Cabe lembrar que a setinha em cima do “v” não representa direção e sentido de nada, ela está ali apenas para dizer que a velocidade representada é a vetorial e não escalar. A **magnitude do vetor** é também conhecida como **módulo** de um vetor.

Então, com essas informações em mãos, se eu fizer aquela mesma pergunta: qual a velocidade vetorial com que o meteoro cruzou os céus? Você responde a magnitude e informa a direção e o sentido, seja dizendo “ xis km/h, tantos graus em relação ao chão, na direção do chão” ou desenhando e escrevendo o módulo ao lado da seguinte maneira: | $\vec{V}$ | = 300 m/s, ou apenas V = 300 m/s.

O mais legal dos vetores é que agora podemos fazer contas pra coisas que se movem em direções diferentes da vertical e horizontal. Nós vamos entender como fazer contas usando vetores na próxima seção.

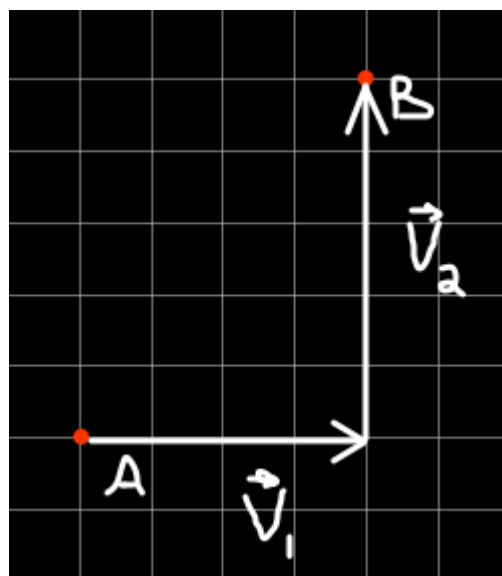
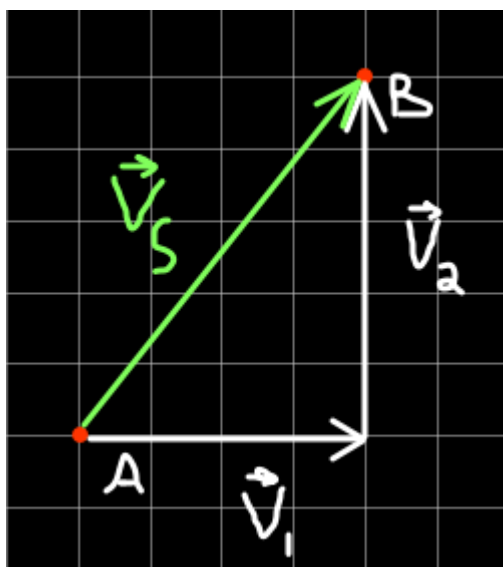
Operações com vetores:

Primeiramente, nesta seção, vamos abordar a forma mais visual dessas operações, sem se importar muito com o valor do módulo dos vetores. Acalme seu coração, não se importe muito em como isso vai funcionar na forma de conta e tente entender a lógica visual, depois nós vamos entrar no assunto das contas.

Dito isso, vamos lá! Imagine a seguinte situação, você está em um daqueles bairros que tem os quarteirões quadradinhos e quer ir de um lugar até o outro, saindo de A e indo até B, como mostra a figura:

Você há de concordar que existem diversas maneiras de se locomover de um ponto até outro, mas uma das mais simples é sair de A pela direita, andar 4 quarteirões, virar a esquerda e andar 5 quarteirões. Outra forma simples é subir 5 quarteirões, virar a esquerda e andar 4 quarteirões.

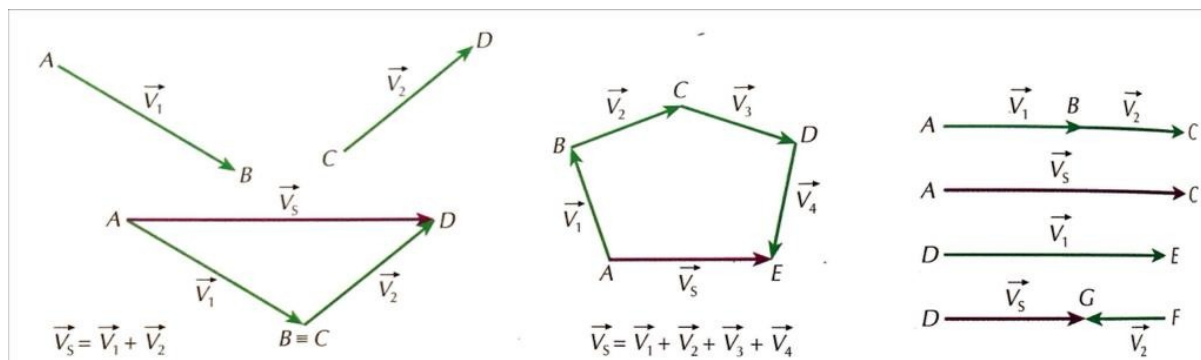
Para nós não importa qual das duas opções que eu expus seja a que você escolheu, o que importa é que podemos representar a sua movimentação usando 2 grandes vetores para qualquer uma delas, não? Se você não consegue visualizar isso, veja a figura.

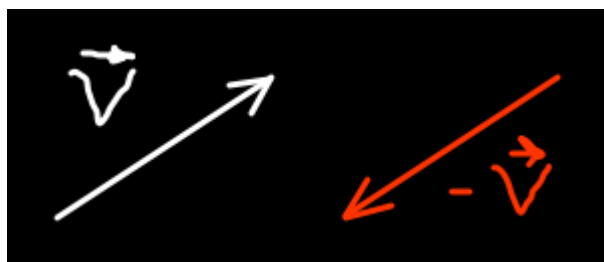
Eu fiz a figura pensando no primeiro trajeto, fica como exercício imaginativo pensar como fica para o segundo trajeto, a lógica é a mesma!

Seguindo com o raciocínio, você não concorda que em vez de usar 2 vetores para representar esse movimento podemos usar apenas um que liga o começo de V_1 ao fim de V_2? Talvez você se pergunte "mas se fizermos isso não estaremos representando o caminho exato que andamos!". Sim, seu questionamento faz sentido, mas essa não é a ideia de um vetor, a ideia de usar um vetor para representar o deslocamento é mostrar o "saldo" do deslocamento, de onde saímos e onde chegamos.

Se ligarmos o ponto de onde saímos com o ponto onde chegamos teremos um outro vetor, nesse caso, ele representa a **soma** dos dois vetores do desenho, não é uma fofurinha?

Parabéns, você acabou de realizar a sua primeira soma de vetores! Formalizando matematicamente o que foi feito, podemos dizer que:

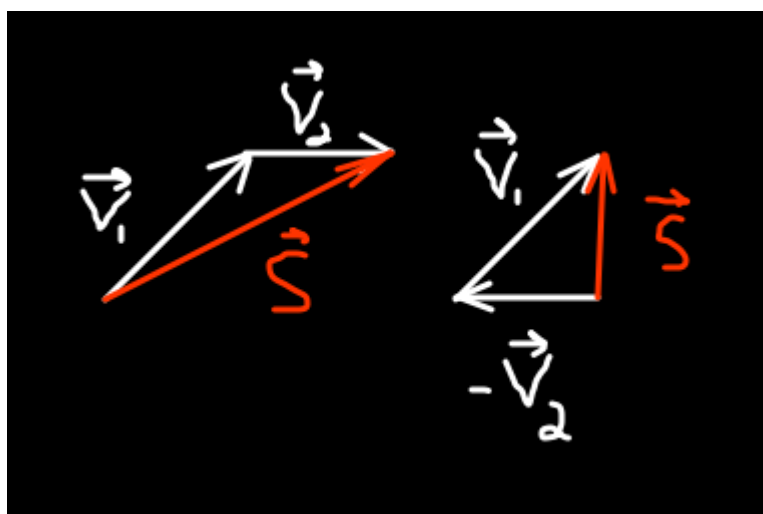
$$\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_S$$

Para somar corretamente os vetores devemos sempre ordená-los de forma que o começo de um se "conecte" com o fim do outro, isso tudo sem mudar a direção e o sentido deles. Depois basta unir o

ponto de partida ao ponto de chegada. A seguir veja alguns casos de soma de vetores…

Uma forma legal de visualizar o mecanismo da soma de vetores é acessar esse site: https://www.walter-fendt.de/html5/phpt/resultant_pt.htm . Lá tem uma animação que mostra os vetores se arranjando para que se realize a soma.

E no caso da **subtração**? Antes disso precisamos entender o que é um **vetor oposto**. O vetor oposto é um vetor com a mesma direção e magnitude de um vetor qualquer, mas de **sentido oposto**. Se temos o vetor V, o oposto dele é o vetor -V. Visualmente a diferença é essa:

Dito isso, vamos para a subtração. Se queremos subtrair um vetor do outro a conta que vamos fazer é:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

Concorda que isso é o mesmo que somar o vetor V_1 como vetor oposto do vetor V_2? Vamos à ilustração:

Consegue ver a mudança entre a soma e a subtração? Veja que na subtração a única diferença é que mudamos o sentido do vetor V_2.

Vamos às últimas operações que vamos aprender a realizar com os vetores: **multiplicação** e **divisão**. Os vetores podem ser multiplicados e divididos por um vetor ou por um número real, vamos aprender apenas com números reais. É uma operação muito simples, basta multiplicar ou dividir o módulo do vetor pelo

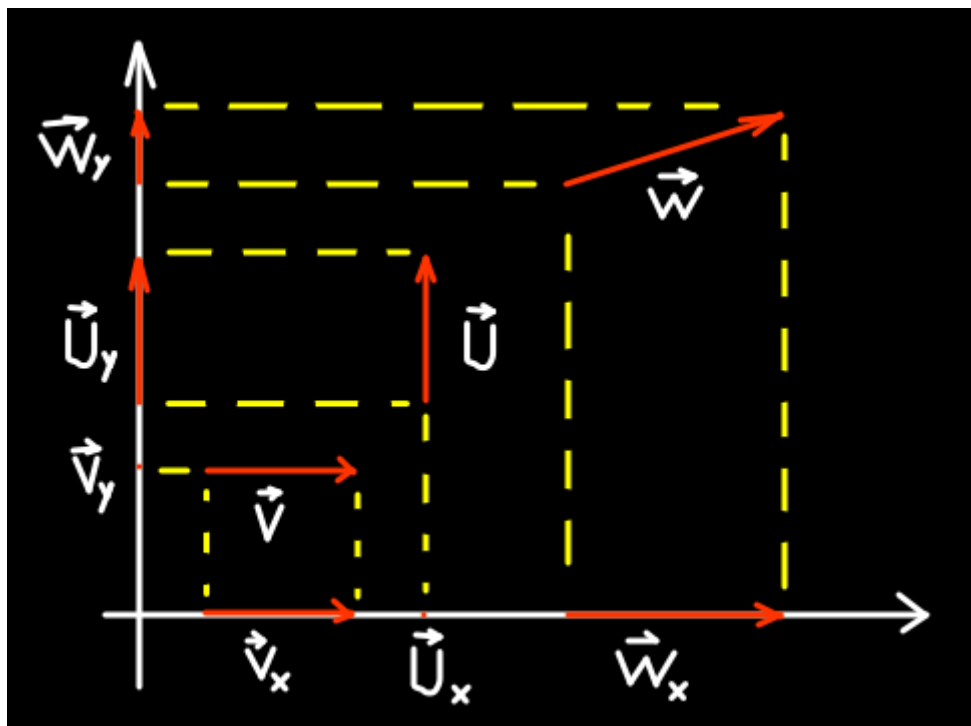
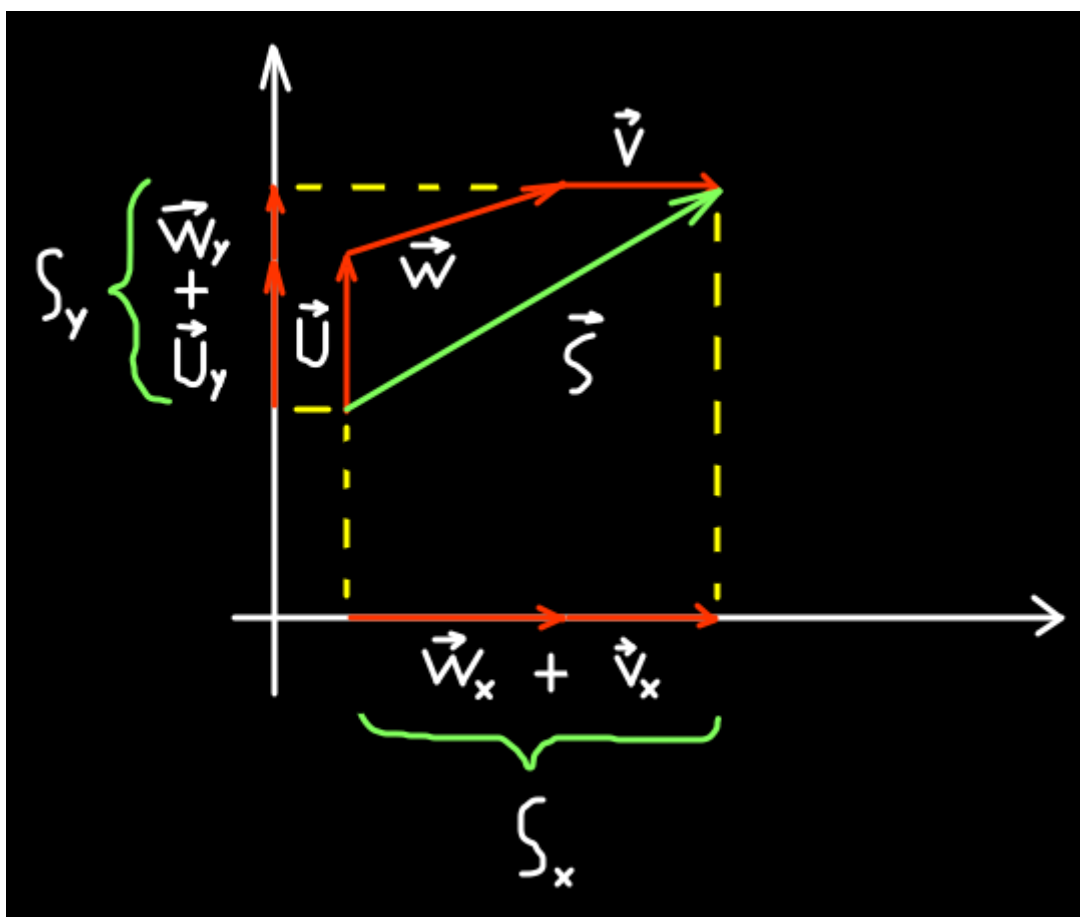
número real. Lembra que o módulo tem relação com o comprimento do vetor? Consegue imaginar o que acontece? Ele varia de tamanho! veja a imagem:

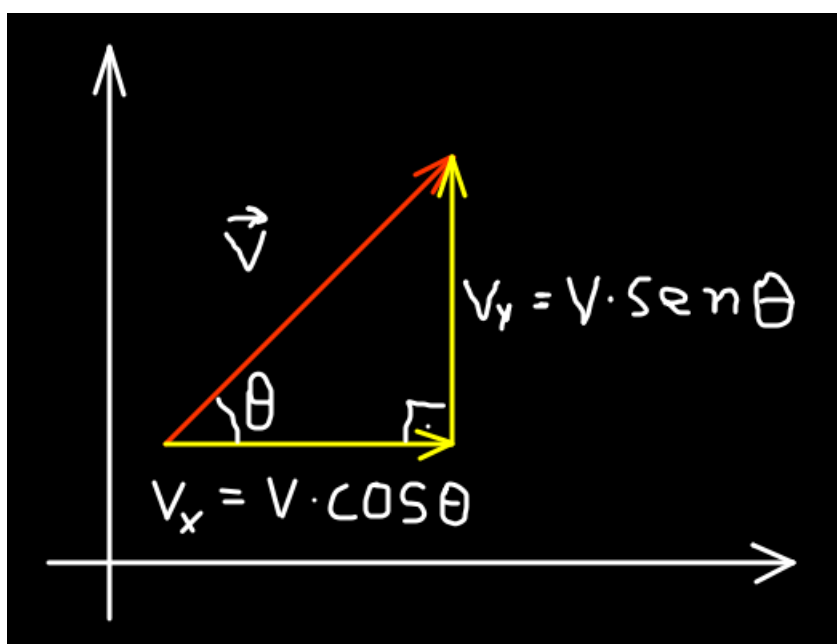
Ao ser multiplicado por 2 o vetor V dobra de tamanho, consequentemente de magnitude.

Vale destacar a multiplicação de um vetor por um número negativo, nesse caso além de mudar de tamanho o vetor muda de sentido também!

Agora que já entendemos como essas operações funcionam visualmente, vamos falar na próxima seção sobre como se faz as contas para descobrir o módulo dos vetores.

Decompondo vetores para realizar operações:

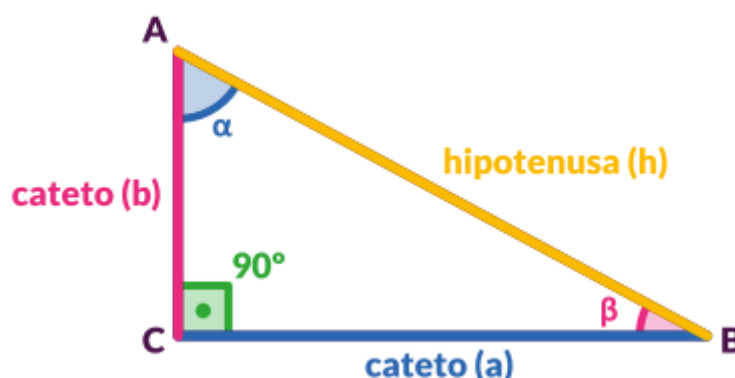
A melhor forma de descobrir o módulo dos vetores ao se realizar uma operação numérica com eles é através da "sombra" deles. Imagine que o vetor está paralelo ao eixo x, se jogarmos uma luz nele vindo de cima para baixo, teremos uma sombra em cima do eixo. Podemos fazer a mesma coisa mas com a luz da direita para a esquerda para termos a sombra dele em y. Podemos fazer o mesmo com um vetor paralelo ao eixo y e um que não é paralelo a nenhum eixo, veja o resultado:

Agora vamos fazer a soma desses vetores e ver como fica a "sombra" do vetor soma:

Veja só, a sombra do vetor soma coincide com a soma da sombra dos vetores U, V e W. Conclusão: para saber o módulo do vetor soma basta somar os vetores "sombra" no mesmo eixo de cada um dos vetores. Agora passaremos a chamar as "sombras" de **componentes do vetor**.

Mas como vamos saber o valor dos componentes? Trigonometria! Caso você nem imagine o que é isso, pule pro apêndice no final do material e volte aqui depois. Imagine que o vetor é a hipotenusa de um triângulo retângulo, os catetos são os componentes desse vetor. Assim:

Dessa forma conseguimos decompor os diferentes vetores e somar seus componentes em cada um dos eixos. Ao fim desse processo temos os componentes do vetor soma. Se quisermos saber qual o módulo do vetor soma basta usar o teorema de pitágoras, já que cada um dos componentes é um cateto do triângulo a hipotenusa é o

próprio vetor soma. **Essa aula continua na semana de matemática pra que não fique muito pesada. Lá falaremos mais sobre os meteoritos e outras coisas que não andam apenas na horizontal e na vertical. Vamos postar um material novo que terá acréscimos a esse daqui. Até!**

Apêndice - Introdução à trigonometria:

A **Trigonometria** é o ramo da matemática responsável por estudar a relação entre ângulos e distâncias. É uma ferramenta da matemática aplicada à geometria. Inicialmente, foi desenvolvida para estudos em Astronomia, e posteriormente teve aplicação em navegação, engenharia, arquitetura e outras disciplinas. Sua principal função é determinar as relações entre os ângulos e os lados de um triângulo.

No caso específico de um triângulo retângulo, um dos ângulos vale 90º. Triângulo retângulo é todo aquele em que a medida de um de seus ângulos internos é igual 90° (ângulo reto). No triângulo retângulo ABC, o ângulo C é reto, o lado oposto ao ângulo reto (h) é chamado de **hipotenusa**, e os outros dois lados (a e b) são chamados de **catetos**, sendo que o cateto que forma o ângulo que se está analisando se chama **cateto adjacente** e o que está do outro lado do ângulo analisado se chama **cateto oposto**. Perceba que um cateto pode ser tanto oposto quanto adjacente, vai depender do ângulo que se toma como referência (esse não pode ser o ângulo de 90°, pois todo cateto é adjacente ao ângulo de 90°).

Em todo triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa (**Teorema de Pitágoras**):

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Vamos definir as seguintes razões entre as medidas de seus lados:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ a}{hipotenusa} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{co}{h} = \frac{a}{h}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ b}{hipotenusa} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{ca}{h} = \frac{b}{h}$$

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ a}{cateto\ b} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{co}{ca} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

Temos também alguns **arcos notáveis**, que são valores referentes aos ângulos de 30º, 45º e 60º:

α	30º	45º	60º
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Créditos das Imagens:

https://www.google.com/maps/@-23.6582013,-46.5588403,10.13z/data=!5m1!1e4

https://www.google.com/maps/@-23.8467293,-46.6684659,11.88z/data=!5m1!1e4

https://pt.wikipedia.org/wiki/Meteoro_de_Tcheliabinsk

Física: Os Fundamentos da Física. Nicolau, Ramalho & Toledo. 10ª edição. Editora Moderna, São Paulo, 2009.

Mundo Matemática - Trigonometria. Mundo Edu.